# 4 NP-complete problems involving Sets and Numbers

## Triparte Matching

Givet 3 set B, G og H alle med n elementer og en relation $T \subseteq B \times G \times H$, find n matchinger at B, G og H hvor ingen komponent går igen.

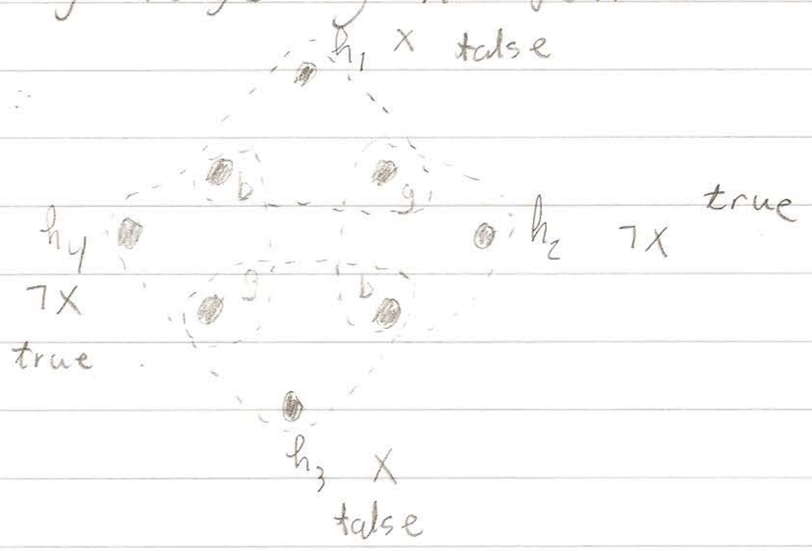
TM ∈ NPC

- TM ∈ NP

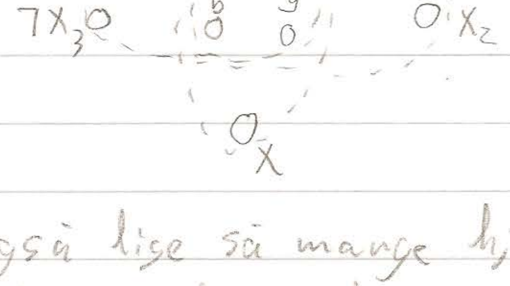
3SAT ≤ TM

Choice-consistency gadget

K piger og drenge og 2K hjem. $K = \max(\#x_i, \#\neg x_i)$




For hver clause laves en dreng og en pige som kan flytte ind i 3 huse - hemlig de variabler der er i clausen




Der tilføjes også lige så mange hjemløse piger og drenge som der er huse for meget.

# Knapsack

## Generelt

n ting hver med værdi $v_i$ og vægt $w_i$

Max vægt: $W$

Find $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ så $\sum_{i \in S} v_i$ maximeres og $\sum_{i \in S} w_i \leq W$

Kan vi finde $S$ så værdien er større end $K$?

## Special tilfælde

$v_i = w_i$ og $W = K$

## Knapsack $\in$ NPC

• Knapsack $\in$ NP

Exact cover by 3-sets $\leq$ Knapsack

ECB3S instance: sets $\{S_1, \dots, S_n\}$ $|S_i| = 3$

Find sets uden enheder til fældes så fællesmængden er $U = \{1, \dots, 3m\}$

| | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1 = \{1, 2, 3\}$ | | | | | | | 1 | 1 | 1 | |
| $S_2 = \{4, 5, 6\}$ | | | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| $S_3 = \{7, 8, 9\}$ | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| $U = \{1, \dots, 9\}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $= 2^m - 1$ |

$n$ (rows), $m$ (columns)

Inkod i base $n+1$ for at undgå carry problemmer

# Bin Packing

Givet $N$ positive heltal $a_1, \dots, a_N$ og to andre heltal $C$ (capacity) og $B$ (#bins). Kan $a_1, \dots, a_N$ partitioneres ind i $B$ subsets hver med højest sum på $C$.

$BP \in NPC$

- $BP \in NP$

Triparte Matching $\leq BP$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ og $T = \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq B \times G \times H$.

Sæt $N = 4m$. Vi laver et item for hver gang en $b_i, g_i$ eller $h_i$ nævnes i en $t_i$ og et item for hver $t_i$.

$C = 40M^4 + 15$ $\quad (M = 100n)$ $\quad B = m$

| Items | | Size |
|---|---|---|
| $b_i[1]$ | | $10M^4 + iM + 1$ |
| $b_i[q]$ | $q > 1$ | $11M^4 + iM + 1$ |
| $g_i[1]$ | | $10M^4 + iM^2 + 2$ |
| $g_i[q]$ | $q > 1$ | $11M^4 + iM^2 + 2$ |
| $h_i[1]$ | | $10M^4 + iM^3 + 4$ |
| $h_i[q]$ | $q > 1$ | $8M^4 + iM^3 + 4$ |
| $triple(b_i, g_j, h_k)$ | | $10M^4 - iM - jM^2 - kM^3 + 8$ |